

Puntos críticos del problema de Fekete

3er Encuentro de Estudiantes de Matemática

Matías Valdés

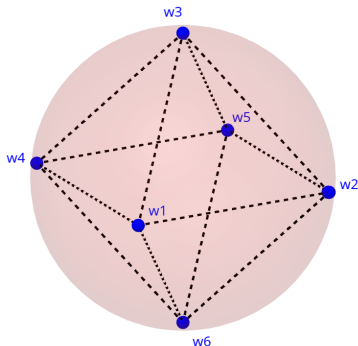
(Marcelo Fiori, Diego Armentano, Federico Carrasco, Leandro Bentancur, Mauricio Velasco, Pedro Raigorodsky)

10/08/24

Problema de Fekete

Colocar n puntos distintos $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ en la esfera S^2 , de forma que se maximice el producto de la distancia entre pares de puntos:

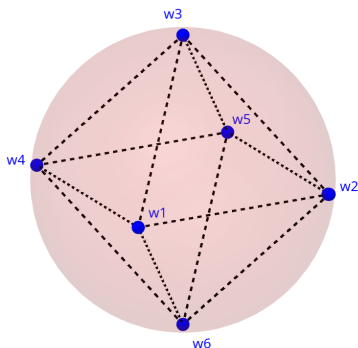
$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|_2.$$



Problema de Fekete

Colocar n puntos distintos $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ en la esfera S^2 , de forma que se maximice el producto de la distancia entre pares de puntos:

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|_2.$$

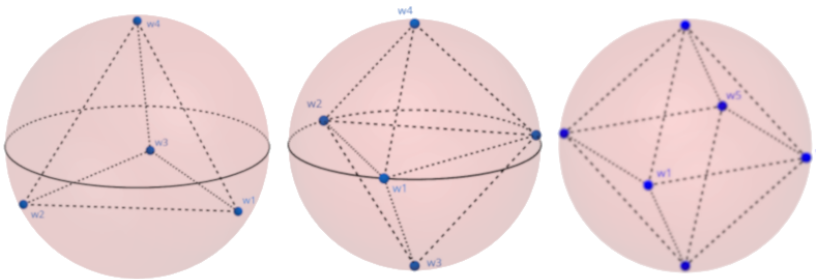


Equivale a minimizar la energía logarítmica en S^2 :

$$E_{\log} := - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \log (\|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|_2^2).$$

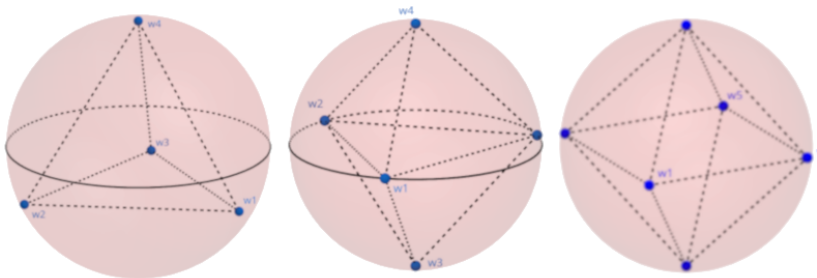
Soluciones conocidas

Sólo se conoce solución para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 (icosaedro).



Soluciones conocidas

Sólo se conoce solución para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 (icosaedro).



Conjunto de configuraciones críticas no es conocido (para $n \geq 4$).

Objetivos de la charla

- Describir un método para determinar el conjunto de configuraciones críticas del problema de Fekete.

Objetivos de la charla

- Describir un método para determinar el conjunto de configuraciones críticas del problema de Fekete.
- Usando técnicas de Geometría Algebraica (basadas en “bases de Grobner”).

Objetivos de la charla

- Describir un método para determinar el conjunto de configuraciones críticas del problema de Fekete.
- Usando técnicas de Geometría Algebraica (basadas en “bases de Grobner”).
- Configuraciones críticas para $n = 5$ y $n = 6$ puntos.

Objetivos de la charla

- Describir un método para determinar el conjunto de configuraciones críticas del problema de Fekete.
- Usando técnicas de Geometría Algebraica (basadas en “bases de Grobner”).
- Configuraciones críticas para $n = 5$ y $n = 6$ puntos.
- Software y hardware que permiten hacer los cálculos.

Objetivos de la charla

- Describir un método para determinar el conjunto de configuraciones críticas del problema de Fekete.
- Usando técnicas de Geometría Algebraica (basadas en “bases de Grobner”).
- Configuraciones críticas para $n = 5$ y $n = 6$ puntos.
- Software y hardware que permiten hacer los cálculos.
- Limitantes del método (en la práctica) y desafíos para $n = 7$ (no se conoce solución).

Configuraciones críticas: $\min E_{\log}(w)$, sujeto a $\|\vec{w}_i\|_2^2 = 1$

Configuraciones críticas: $\min E_{\log}(w)$, sujeto a $\|\vec{w}_i\|_2^2 = 1$

- Lagrangeano del problema:

$$L(w, \lambda) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \log(\|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|_2^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\|\vec{w}_i\|_2^2 - 1).$$

Configuraciones críticas: $\min E_{\log}(w)$, sujeto a $\|\vec{w}_i\|_2^2 = 1$

- Lagrangeano del problema:

$$L(w, \lambda) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \log(\|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|_2^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\|\vec{w}_i\|_2^2 - 1).$$

- $w = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$, con $\vec{w}_i \in S^2$, es **configuración crítica** (candidata a ser solución), si existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, multiplicador de Lagrange, tal que:

$$\partial_{\vec{w}_i} L(w, \lambda) = \vec{0}, \quad \forall i.$$

Configuraciones críticas: $\min E_{\log}(w)$, sujeto a $\|\vec{w}_i\|_2^2 = 1$

- Lagrangeano del problema:

$$L(w, \lambda) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \log(\|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|_2^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\|\vec{w}_i\|_2^2 - 1).$$

- $w = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$, con $\vec{w}_i \in S^2$, es **configuración crítica** (candidata a ser solución), si existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, multiplicador de Lagrange, tal que:

$$\partial_{\vec{w}_i} L(w, \lambda) = \vec{0}, \quad \forall i.$$

- En nuestro problema equivale a:

$$\begin{aligned} \vec{w}_i^T \vec{w}_i &= 1 \quad (\vec{w}_i \in S^2), \quad \forall i, \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\vec{w}_i - \vec{w}_j}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j} + 2\lambda_i \vec{w}_i &= \vec{0}, \quad \lambda_i = \frac{n-1}{2}, \quad \forall i. \end{aligned}$$

Configuraciones críticas

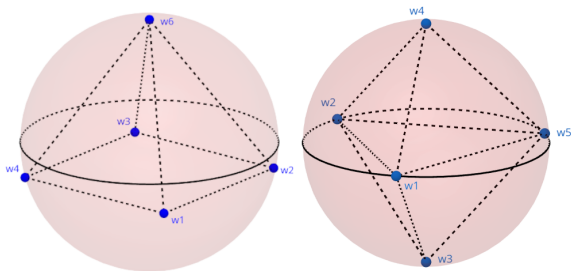
- ¿Cómo son las soluciones de este sistema de ecuaciones? (las configuraciones críticas)

Configuraciones críticas

- ¿Cómo son las soluciones de este sistema de ecuaciones? (las configuraciones críticas)
- Sólo sabemos que tienen centro de masa nulo: $\sum_{i=1}^n \vec{w}_i = \vec{0}$.

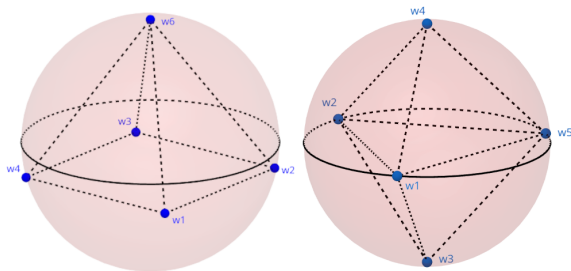
Configuraciones críticas

- ¿Cómo son las soluciones de este sistema de ecuaciones? (las configuraciones críticas)
- Sólo sabemos que tienen centro de masa nulo: $\sum_{i=1}^n \vec{w}_i = \vec{0}$.
- Para $n = 5$, algunas configuraciones críticas: Ecuador, 1:4 y 1:3:1.



Configuraciones críticas

- ¿Cómo son las soluciones de este sistema de ecuaciones? (las configuraciones críticas)
- Sólo sabemos que tienen centro de masa nulo: $\sum_{i=1}^n \vec{w}_i = \vec{0}$.
- Para $n = 5$, algunas configuraciones críticas: Ecuador, 1:4 y 1:3:1.



- ¿Hay alguna otra?

Configuraciones críticas

- Idea:
 - 1 contar (sin hallar) la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones de configuraciones críticas.
 - 2 ver si coincide con la cantidad de configuraciones críticas que tenemos identificadas.

Configuraciones críticas

- Idea:
 - 1 contar (sin hallar) la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones de configuraciones críticas.
 - 2 ver si coincide con la cantidad de configuraciones críticas que tenemos identificadas.
- En un sistema de ecuaciones **polinomiales**, podemos contar la cantidad de soluciones con técnicas de Geometría Algebraica.

Configuraciones críticas

- Idea:
 - 1 contar (sin hallar) la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones de configuraciones críticas.
 - 2 ver si coincide con la cantidad de configuraciones críticas que tenemos identificadas.
- En un sistema de ecuaciones **polinomiales**, podemos contar la cantidad de soluciones con técnicas de Geometría Algebraica.
- Nuestras ecuaciones son:
 - $\vec{w}_i^T \vec{w}_i = 1 \Leftrightarrow w_{i1}^2 + w_{i2}^2 + w_{i3}^2 = 1$. Polinomial ✓

Configuraciones críticas

- Idea:
 - 1 contar (sin hallar) la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones de configuraciones críticas.
 - 2 ver si coincide con la cantidad de configuraciones críticas que tenemos identificadas.
- En un sistema de ecuaciones **polinomiales**, podemos contar la cantidad de soluciones con técnicas de Geometría Algebraica.
- Nuestras ecuaciones son:
 - $\vec{w}_i^T \vec{w}_i = 1 \Leftrightarrow w_{i1}^2 + w_{i2}^2 + w_{i3}^2 = 1$. Polinomial ✓
 - $-\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\vec{w}_i - \vec{w}_j}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j} + (n-1)\vec{w}_i = \vec{0}$. No polinomial X

Configuraciones críticas

- Idea:
 - 1 contar (sin hallar) la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones de configuraciones críticas.
 - 2 ver si coincide con la cantidad de configuraciones críticas que tenemos identificadas.
- En un sistema de ecuaciones **polinomiales**, podemos contar la cantidad de soluciones con técnicas de Geometría Algebraica.
- Nuestras ecuaciones son:
 - $\vec{w}_i^T \vec{w}_i = 1 \Leftrightarrow w_{i1}^2 + w_{i2}^2 + w_{i3}^2 = 1$. Polinomial ✓
 - $-\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\vec{w}_i - \vec{w}_j}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j} + (n-1)\vec{w}_i = \vec{0}$. No polinomial X
- Pero... podemos convertir nuestras ecuaciones en un sistema de ecuaciones polinomiales.

Sistema de ecuaciones polinomiales: Variables auxiliares

- Introducimos variables auxiliares z_{ij} , tales que:

$$z_{ij} \left(1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \right) = 1, \forall i \neq j.$$

Sistema de ecuaciones polinomiales: Variables auxiliares

- Introducimos variables auxiliares z_{ij} , tales que:

$$z_{ij} \left(1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \right) = 1, \forall i \neq j.$$

- Esto implica: $1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \neq 0$. Entonces: $z_{ij} = \frac{1}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j}$.

Sistema de ecuaciones polinomiales: Variables auxiliares

- Introducimos variables auxiliares z_{ij} , tales que:

$$z_{ij} \left(1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \right) = 1, \forall i \neq j.$$

- Esto implica: $1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \neq 0$. Entonces: $z_{ij} = \frac{1}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j}$.
- Las ecuaciones se convierten en:

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\vec{w}_i - \vec{w}_j}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j} + (n-1)\vec{w}_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (\vec{w}_i - \vec{w}_j) + (n-1)\vec{w}_i = 0, \forall i.$$

Sistema de ecuaciones polinomiales: Variables auxiliares

- Introducimos variables auxiliares z_{ij} , tales que:

$$z_{ij} \left(1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \right) = 1, \forall i \neq j.$$

- Esto implica: $1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j \neq 0$. Entonces: $z_{ij} = \frac{1}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j}$.
- Las ecuaciones se convierten en:

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\vec{w}_i - \vec{w}_j}{1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j} + (n-1)\vec{w}_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (\vec{w}_i - \vec{w}_j) + (n-1)\vec{w}_i = 0, \forall i.$$

- Además: $\vec{w}_i^T \vec{w}_i = 1, \forall i$

Simetrías de rotación

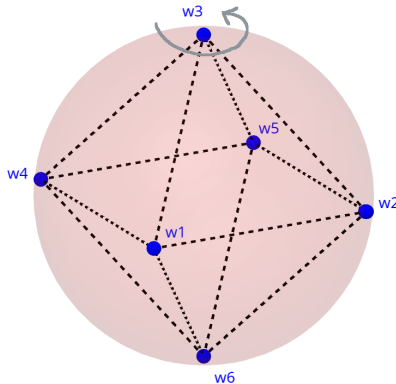
- Tenemos un sistema polinomial ✓ pero...

Simetrías de rotación

- Tenemos un sistema polinomial ✓ pero...
- Tiene infinitas soluciones X (no sirve poder contar)

Simetrías de rotación

- Tenemos un sistema polinomial ✓ pero...
- Tiene infinitas soluciones X (no sirve poder contar)
- Esto es porque las ecuaciones son invariantes por rotaciones.



Simetrías de rotación

- 1 Queremos eliminar las simetrías de rotación.

Simetrías de rotación

- 1 Queremos eliminar las simetrías de rotación.
- 2 Para esto vamos a trabajar con los productos internos $x_{ij} := \vec{w}_i^T \vec{w}_j$ (ángulo entre $\vec{w}_i$ y $\vec{w}_j$).

Simetrías de rotación

- 1 Queremos eliminar las simetrías de rotación.
- 2 Para esto vamos a trabajar con los productos internos
 $x_{ij} := \vec{w}_i^T \vec{w}_j$ (ángulo entre $\vec{w}_i$ y $\vec{w}_j$).

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (\vec{w}_i - \vec{w}_j) + (n-1)\vec{w}_i = \vec{0}, \quad \forall i \Rightarrow \times \vec{w}_k^T$$

$$\Rightarrow - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (\vec{w}_k^T \vec{w}_i - \vec{w}_k^T \vec{w}_j) + (n-1)\vec{w}_k^T \vec{w}_i = 0, \quad \forall i, k.$$

Simetrías de rotación

- Queremos eliminar las simetrías de rotación.
- Para esto vamos a trabajar con los productos internos
 $x_{ij} := \vec{w}_i^T \vec{w}_j$ (ángulo entre $\vec{w}_i$ y $\vec{w}_j$).

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (\vec{w}_i - \vec{w}_j) + (n-1)\vec{w}_i = \vec{0}, \quad \forall i \Rightarrow \times \vec{w}_k^T$$

$$\Rightarrow - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (\vec{w}_k^T \vec{w}_i - \vec{w}_k^T \vec{w}_j) + (n-1)\vec{w}_k^T \vec{w}_i = 0, \quad \forall i, k.$$

- Expresado en las nuevas variables, el sistema polinomial es:

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} (x_{ki} - x_{kj}) + (n-1)x_{ki} = 0, \quad \forall i, k,$$

$$x_{ii} = 1, \quad \forall i, \quad z_{ij} (1 - \vec{w}_i^T \vec{w}_j) = 1, \quad \forall i \neq j.$$

Ahora sí: contar soluciones de un sistema polinomial

- Sistema polinomial (con r ecuaciones y m variables):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}.$$

Ahora sí: contar soluciones de un sistema polinomial

- Sistema polinomial (con r ecuaciones y m variables):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}.$$

- Ideal generado por los polinomios: $I = (g_1, \dots, g_r)$.

Ahora sí: contar soluciones de un sistema polinomial

- Sistema polinomial (con r ecuaciones y m variables):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}.$$

- Ideal generado por los polinomios: $I = (g_1, \dots, g_r)$.
- I es el conjunto de polinomios de la forma: $h_1g_1 + \dots + h_rg_r$, donde h_i son polinomios cualesquiera.

Ahora sí: contar soluciones de un sistema polinomial

- Sistema polinomial (con r ecuaciones y m variables):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}.$$

- Ideal generado por los polinomios: $I = (g_1, \dots, g_r)$.
- I es el conjunto de polinomios de la forma: $h_1g_1 + \dots + h_rg_r$, donde h_i son polinomios cualesquiera.
- Calculamos una “base de Grobner” G del ideal I (es un generador “especial” de I).

Ahora sí: contar soluciones de un sistema polinomial

- Sistema polinomial (con r ecuaciones y m variables):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}.$$

- Ideal generado por los polinomios: $I = (g_1, \dots, g_r)$.
- I es el conjunto de polinomios de la forma: $h_1g_1 + \dots + h_rg_r$, donde h_i son polinomios cualesquiera.
- Calculamos una “base de Grobner” G del ideal I (es un generador “especial” de I).
- Si tenemos G , es inmediato calcular la cantidad de soluciones del sistema asociado a I (incluye multiplicidades y en $\mathbb{C}$).

Volviendo al caso $n = 5$

Volviendo al caso $n = 5$

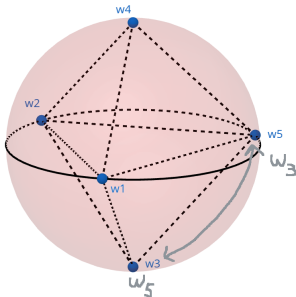
- Grobner nos dice que hay 37 soluciones (contando mult. en $\mathbb{C}$)

Volviendo al caso $n = 5$

- Grobner nos dice que hay 37 soluciones (contando mult. en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas sólo tres: Ecuador, 1:4 y 1:3:1.

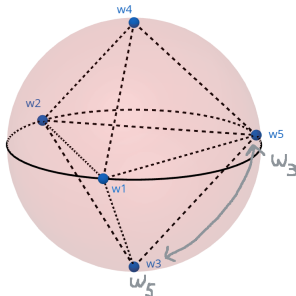
Volviendo al caso $n = 5$

- Grobner nos dice que hay 37 soluciones (contando mult. en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas sólo tres: Ecuador, 1:4 y 1:3:1.
- Pero... las permutaciones (distintas) también cuentan:



Volviendo al caso $n = 5$

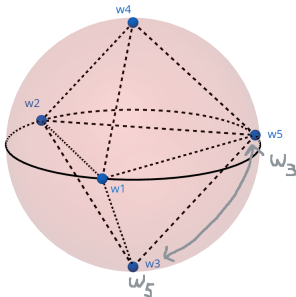
- Grobner nos dice que hay 37 soluciones (contando mult. en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas sólo tres: Ecuador, 1:4 y 1:3:1.
- Pero... las permutaciones (distintas) también cuentan:



- Ecuador (12 perms.) + 1:4 (15) + 1:3:1 (10) = 37.

Volviendo al caso $n = 5$

- Grobner nos dice que hay 37 soluciones (contando mult. en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas sólo tres: Ecuador, 1:4 y 1:3:1.
- Pero... las permutaciones (distintas) también cuentan:



- Ecuador (12 perms.) + 1:4 (15) + 1:3:1 (10) = 37.
- 37 soluciones identificadas = 37 soluciones existentes ✓.

Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

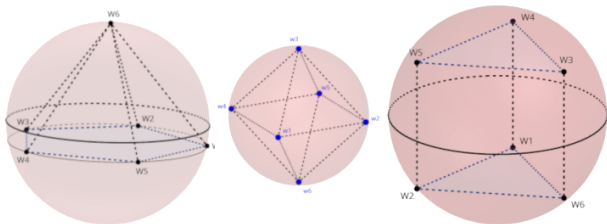
Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

- Grobner nos dice que hay 717 configuraciones críticas (contando multiplicidades y en $\mathbb{C}$)

Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

- Grobner nos dice que hay 717 configuraciones críticas (contando multiplicidades y en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas (con sus permutaciones):

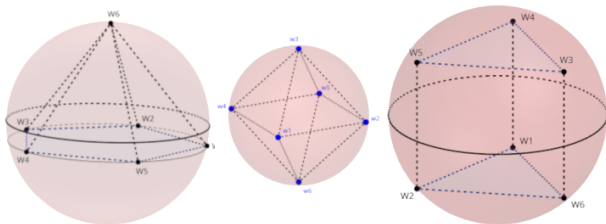
$$\text{Ecuador (60)} + 1:5 \text{ (72)} + 1:4:1 \text{ (15)} + 3:3 \text{ (120)} = 267.$$



Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

- Grobner nos dice que hay 717 configuraciones críticas (contando multiplicidades y en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas (con sus permutaciones):

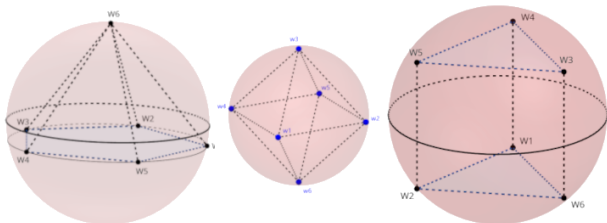
$$\text{Ecuador (60)} + 1:5 \text{ (72)} + 1:4:1 \text{ (15)} + 3:3 \text{ (120)} = 267.$$



- Diferencia: $717 - 267 = 450$ configuraciones:

Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

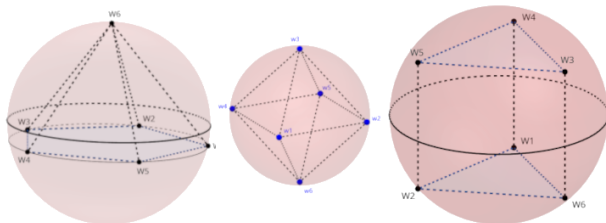
- Grobner nos dice que hay 717 configuraciones críticas (contando multiplicidades y en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas (con sus permutaciones):
$$\text{Ecuador (60)} + 1:5 \text{ (72)} + 1:4:1 \text{ (15)} + 3:3 \text{ (120)} = 267.$$



- Diferencia: $717 - 267 = 450$ configuraciones:
 - que no tenemos identificadas, o

Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

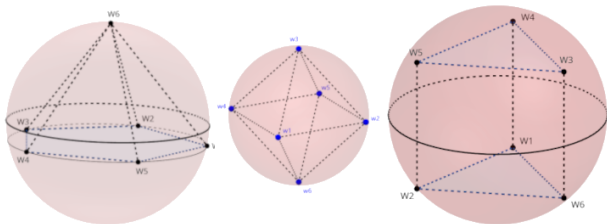
- Grobner nos dice que hay 717 configuraciones críticas (contando multiplicidades y en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas (con sus permutaciones):
 $\text{Ecuador (60)} + 1:5 \text{ (72)} + 1:4:1 \text{ (15)} + 3:3 \text{ (120)} = 267.$



- Diferencia: $717 - 267 = 450$ configuraciones:
 - que no tenemos identificadas, o
 - multiplicidades de las que tenemos identificadas.

Pasemos al caso de $n = 6$ puntos

- Grobner nos dice que hay 717 configuraciones críticas (contando multiplicidades y en $\mathbb{C}$)
- Tenemos identificadas (con sus permutaciones):
$$\text{Ecuador (60)} + 1:5 \text{ (72)} + 1:4:1 \text{ (15)} + 3:3 \text{ (120)} = 267.$$



- Diferencia: $717 - 267 = 450$ configuraciones:
 - que no tenemos identificadas, o
 - multiplicidades de las que tenemos identificadas.
- Ya no basta con contar. Hay que pensar algo más.

Valores posibles de los productos internos

- En una configuración crítica, los valores que puede tomar x_{12} , son los mismos que puede tomar cualquier variable x_{ij} .

Valores posibles de los productos internos

- En una configuración crítica, los valores que puede tomar x_{12} , son los mismos que puede tomar cualquier variable x_{ij} .
- Veamos cómo calcular los valores posibles de x_{12} .

Valores posibles de los productos internos

- En una configuración crítica, los valores que puede tomar x_{12} , son los mismos que puede tomar cualquier variable x_{ij} .
- Veamos cómo calcular los valores posibles de x_{12} .
- Recordar: ideal $I = (g_1, \dots, g_r)$; con g_i polinomios del sistema de ecuaciones.

Valores posibles de los productos internos

- En una configuración crítica, los valores que puede tomar x_{12} , son los mismos que puede tomar cualquier variable x_{ij} .
- Veamos cómo calcular los valores posibles de x_{12} .
- Recordar: ideal $I = (g_1, \dots, g_r)$; con g_i polinomios del sistema de ecuaciones.
- “Ideal de eliminación” $I \cap R[x_{12}]$. Conjunto formado por polinomios que sólo tienen variable x_{12} , y que se obtienen combinando generadores de I .

Valores posibles de los productos internos

- En una configuración crítica, los valores que puede tomar x_{12} , son los mismos que puede tomar cualquier variable x_{ij} .
- Veamos cómo calcular los valores posibles de x_{12} .
- Recordar: ideal $I = (g_1, \dots, g_r)$; con g_i polinomios del sistema de ecuaciones.
- “Ideal de eliminación” $I \cap R[x_{12}]$. Conjunto formado por polinomios que sólo tienen variable x_{12} , y que se obtienen combinando generadores de I .
- Ejemplo (con dos variables): si $I = (3x + 5y^3, y^2x)$, entonces:

$$x(3x + 5y^3) - 5y(y^2x) = 3x^2 \in I \cap R[x].$$

Valores posibles de los productos internos

- En una configuración crítica, los valores que puede tomar x_{12} , son los mismos que puede tomar cualquier variable x_{ij} .
- Veamos cómo calcular los valores posibles de x_{12} .
- Recordar: ideal $I = (g_1, \dots, g_r)$; con g_i polinomios del sistema de ecuaciones.
- “Ideal de eliminación” $I \cap R[x_{12}]$. Conjunto formado por polinomios que sólo tienen variable x_{12} , y que se obtienen combinando generadores de I .
- Ejemplo (con dos variables): si $I = (3x + 5y^3, y^2x)$, entonces:

$$x(3x + 5y^3) - 5y(y^2x) = 3x^2 \in I \cap R[x].$$

- Los valores que puede tomar x_{12} en una solución del sistema asociado a I , son soluciones del sistema asociado a $I \cap R[x_{12}]$.

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?
- Sea G una base de Grobner de I , calculada con el orden monomial lexicográfico.

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?
- Sea G una base de Grobner de I , calculada con el orden monomial lexicográfico.
- Nos quedamos con los polinomios del conjunto G donde sólo aparece x_{12} .

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?
- Sea G una base de Grobner de I , calculada con el orden monomial lexicográfico.
- Nos quedamos con los polinomios del conjunto G donde sólo aparece x_{12} .
- Esto da un generador de $I \cap R[x_{12}]$ (que es generado por un único polinomio $h(x_{12})$).

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?
- Sea G una base de Grobner de I , calculada con el orden monomial lexicográfico.
- Nos quedamos con los polinomios del conjunto G donde sólo aparece x_{12} .
- Esto da un generador de $I \cap R[x_{12}]$ (que es generado por un único polinomio $h(x_{12})$).
- Las raíces de h son los posibles valores que puede tomar x_{12} en una solución de I .

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?
- Sea G una base de Grobner de I , calculada con el orden monomial lexicográfico.
- Nos quedamos con los polinomios del conjunto G donde sólo aparece x_{12} .
- Esto da un generador de $I \cap R[x_{12}]$ (que es generado por un único polinomio $h(x_{12})$).
- Las raíces de h son los posibles valores que puede tomar x_{12} en una solución de I .
- Ejemplo: si $I = (3x + 5y^3, y^2x + 3y)$, entonces:

$$G = \{x^5 - 45x, 15y + x^3\}, \quad I \cap R[x] = (x^5 - 45x).$$

Teorema de eliminación

- ¿Cómo podemos calcular $I \cap R[x_{12}]$?
- Sea G una base de Grobner de I , calculada con el orden monomial lexicográfico.
- Nos quedamos con los polinomios del conjunto G donde sólo aparece x_{12} .
- Esto da un generador de $I \cap R[x_{12}]$ (que es generado por un único polinomio $h(x_{12})$).
- Las raíces de h son los posibles valores que puede tomar x_{12} en una solución de I .
- Ejemplo: si $I = (3x + 5y^3, y^2x + 3y)$, entonces:

$$G = \{x^5 - 45x, 15y + x^3\}, \quad I \cap R[x] = (x^5 - 45x).$$

En el conjunto de soluciones de I , $x \in \{0, 45^{1/4}\}$.

Valores posibles de los productos internos

Obtenemos: $I \cap R[x_{12}] = (h(x_{12}))$, con h polinomio de grado 31.

No.	Factor del generador	Raíces	Configuración asociada
1	x_{12}	0	1:4:1
2	$x_{12} + 1$	-1	Ecuador, 1:4:1
3	$2x_{12} - 1$	$1/2$	Ecuador
4	$2x_{12} + 1$	$-1/2$	Ecuador
5	$5x_{12} - 1$	$1/5$	?
6	$5x_{12} + 1$	$-1/5$	1:5
7	$5x_{12} + 7$	$-7/5$	?
8	$5x_{12}^2 + 1$	$\pm \frac{i}{\sqrt{5}}$	compleja
9	$5x_{12}^2 - 22x_{12} + 5$	$\frac{11 \pm 4\sqrt{6}}{5}$	3:3
10	$5x_{12}^2 + 2x_{12} - 1$	$\frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$	3:3
11	$5x_{12}^2 + 14x_{12} - 1$	$\frac{-7 \pm 3\sqrt{6}}{5}$	3:3
12	$25x_{12}^2 + 28x_{12} + 19$	$\frac{-14 \pm i3\sqrt{31}}{25}$	compleja
13	$125x_{12}^2 + 50x_{12} - 31$	$\frac{-5 \pm 6\sqrt{5}}{25}$	1:5
14	$100x_{12}^4 + 95x_{12}^3 - 21x_{12}^2 - 22x_{12} + 10$	4 complejas	compleja
15	$250x_{12}^4 + 110x_{12}^3 - 21x_{12}^2 - 19x_{12} + 4$	4 complejas	compleja
16	$400x_{12}^4 + 488x_{12}^3 - 111x_{12}^2 - 196x_{12} + 67$	4 complejas	compleja

Soluciones con x_{12} fijo

- Para cada factor h_k de h : consideramos $J = (g_1, \dots, g_r, h_k)$.

Soluciones con x_{12} fijo

- Para cada factor h_k de h : consideramos $J = (g_1, \dots, g_r, h_k)$.
- Soluciones de J son las soluciones de I , con x_{12} fijo.

Soluciones con x_{12} fijo

- Para cada factor h_k de h : consideramos $J = (g_1, \dots, g_r, h_k)$.
- Soluciones de J son las soluciones de I , con x_{12} fijo.
- J tiene menos soluciones asociadas, por lo que es más sencillo para hacer cálculos.

Soluciones con x_{12} fijo

- Para cada factor h_k de h : consideramos $J = (g_1, \dots, g_r, h_k)$.
- Soluciones de J son las soluciones de I , con x_{12} fijo.
- J tiene menos soluciones asociadas, por lo que es más sencillo para hacer cálculos.
- Calculamos la factorización en “ideales primos minimales”:

$$J = J_1 \cap \dots \cap J_s.$$

Soluciones con x_{12} fijo

- Para cada factor h_k de h : consideramos $J = (g_1, \dots, g_r, h_k)$.
- Soluciones de J son las soluciones de I , con x_{12} fijo.
- J tiene menos soluciones asociadas, por lo que es más sencillo para hacer cálculos.
- Calculamos la factorización en “ideales primos minimales”:

$$J = J_1 \cap \dots \cap J_s.$$

- Hallamos conjunto de solución de cada J_i (sistema polinomial sencillo).

Soluciones con x_{12} fijo

- Para cada factor h_k de h : consideramos $J = (g_1, \dots, g_r, h_k)$.
- Soluciones de J son las soluciones de I , con x_{12} fijo.
- J tiene menos soluciones asociadas, por lo que es más sencillo para hacer cálculos.
- Calculamos la factorización en “ideales primos minimales”:

$$J = J_1 \cap \dots \cap J_s.$$

- Hallamos conjunto de solución de cada J_i (sistema polinomial sencillo).
- Conjunto solución de J cumple: $V(J) = V(J_1) \cup \dots \cup V(J_s)$.

Identificamos nuevas soluciones y sus permutaciones

Dos nuevas soluciones, ambas con coordenadas complejas.

No.	Factor del generador	Raíces	Configuración asociada
1	x_{12}	0	1:4:1
2	$x_{12} + 1$	-1	Ecuador, 1:4:1, Compleja 1
3	$2x_{12} - 1$	$1/2$	Ecuador
4	$2x_{12} + 1$	$-1/2$	Ecuador
5	$5x_{12} - 1$	$1/5$	Compleja 1
6	$5x_{12} + 1$	$-1/5$	1:5
7	$5x_{12} + 7$	$-7/5$	Compleja 1
8	$5x_{12}^2 + 1$	$\pm \frac{i}{\sqrt{5}}$	Compleja 1
9	$5x_{12}^2 - 22x_{12} + 5$	$\frac{11 \pm 4\sqrt{6}}{5}$	3:3
10	$5x_{12}^2 + 2x_{12} - 1$	$\frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$	3:3
11	$5x_{12}^2 + 14x_{12} - 1$	$\frac{-7 \pm 3\sqrt{6}}{5}$	3:3
12	$25x_{12}^2 + 28x_{12} + 19$	$\frac{-14 \pm 3\sqrt{31}}{25}$	Compleja 2
13	$125x_{12}^2 + 50x_{12} - 31$	$\frac{-5 \pm 6\sqrt{5}}{25}$	1:5
14	$100x_{12}^4 + 95x_{12}^3 - 21x_{12}^2 - 22x_{12} + 10$	4 complejas	Compleja 2
15	$250x_{12}^4 + 110x_{12}^3 - 21x_{12}^2 - 19x_{12} + 4$	4 complejas	Compleja 2
16	$400x_{12}^4 + 488x_{12}^3 - 111x_{12}^2 - 196x_{12} + 67$	4 complejas	Compleja 2

717 soluciones identificadas = 717 soluciones existentes ✓.

Software / Hardware

```

Terminal - usuario@bras: ~
Archivo Editar Ver Terminal Pestafus Ayuda
$ ././msolveBS -g 2 -v 2 -t 1 -f ejemplo_entrada.ms -o ejemplo_salida.ms

----- INPUT DATA -----
Variables          3
Equations          3
Rinvald equations  0
field characteristic 101
homogeneous input? 0
signature-based computation
monomial order     DEL
basis hash table resetting OFF
linear algebra option 2
initial hash table size 131072 (2^17)
max pair selection ALL
reduce gb          1
nthreads           1
info level         2
generate gb files  0

-----
Legend for f4 information
deg      current degree of pairs selected
sel      number of pairs selected in this
pairs    total number of pairs in nair list
mat

density
new data

time(re)
Macaulay2, version 1.21
with packages: ConwayPolynomials, Elimination, IntegralClosure, InverseSystems,
Isomorphism, LLBases, MinimalPrimes, OnlineLookup,
PrimaryDecomposition, ReesAlgebra, Saturation, TangentCone

i1 : R = QQ[x,y]

o1 = R

o1 : PolynomialRing

i2 : I = ideal(3*x+5*y^3, y^2*x)

          3      2
o2 = ideal (5y  + 3x, x*y )

o2 : Ideal of R
  
```

Msolve: bases de Grobner.

Macaulay 2: ideales primos minimales, grado del ideal, etc.

Clusteruy: computadoras con muchos procesadores y memoria RAM (centro de cómputo de ANTEL en Pando, con acceso remoto).

Tiempos de ejecución y memoria RAM

Ideal de eliminación $I \cap R[x_{12}]$, con $n = 6$:

Tiempos de ejecución y memoria RAM

Ideal de eliminación $I \cap R[x_{12}]$, con $n = 6$:

- Ideal I : variables: 30, ecuaciones: 276.

Tiempos de ejecución y memoria RAM

Ideal de eliminación $I \cap R[x_{12}]$, con $n = 6$:

- Ideal I : variables: 30, ecuaciones: 276.
- Tiempo ejecución: 7 horas y 42 minutos (20 núcleos)

Tiempos de ejecución y memoria RAM

Ideal de eliminación $I \cap R[x_{12}]$, con $n = 6$:

- Ideal I : variables: 30, ecuaciones: 276.
- Tiempo ejecución: 7 horas y 42 minutos (20 núcleos)
- Memoria RAM utilizada: 155 GB

Caso $n = 7$

- Cálculo de Base de Grobner: falta tiempo y memoria RAM.

Caso $n = 7$

- Cálculo de Base de Grobner: falta tiempo y memoria RAM.
- Reducir/Eliminar simetrías de permutación del problema.

Caso $n = 7$

- Cálculo de Base de Grobner: falta tiempo y memoria RAM.
- Reducir/Eliminar simetrías de permutación del problema.
- Eliminar configuraciones complejas.

FIN

Gracias.